8. RÉELS et COMPACTS CONNEXES

$\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{T}_{us}$ est compact

BOREL-LEBESGUE

▷ $\mathcal{R}$ une recouvrement ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$

▷ $E = \{x \in \overline{\mathbb{R}}$ / il existe une partie FINIE de $\mathcal{R}$ qui recouvre $[-\infty \ x]\}$

* $[-\infty \ -\infty] = \{-\infty\}$ est recouvert par toute pièce de $\mathcal{R}$ comprenant $-\infty$

$-\infty \in E$

$E \neq \emptyset$

E partie de $\overline{\mathbb{R}}$

E majorée par $+\infty$

E partie non vide majorée de $\overline{\mathbb{R}}$

En vertu du théorème du plus petit majorant

E suprémée

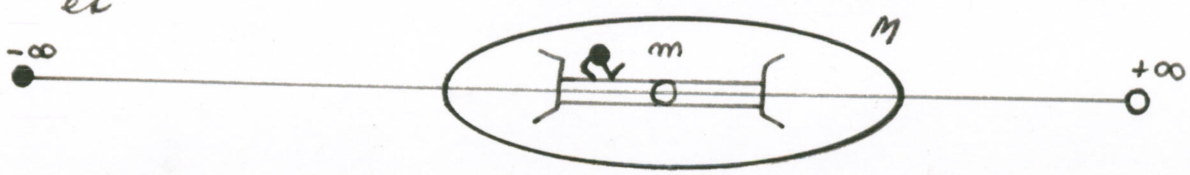
▷ $m = \sup E$

m adhère à E

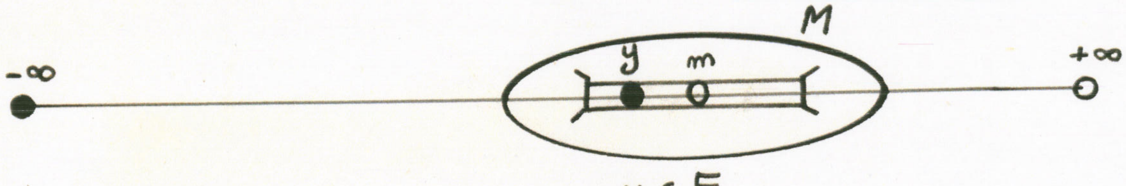
m appartient à une pièce M de $\mathcal{R}$

cette pièce M étant ouverte, contient un intervalle ouvert centré en m

et



d'où $M \cap E \neq \emptyset$



$y \in E$

$[-\infty \;\; y\,]$ est recouvert par une partie FINIE $\mathcal{F}$ de $\mathcal{R}$

$\mathcal{F} \cup \{M\}$ est partie FINIE de $\mathcal{R}$

recouvrant $[-\infty \;\; y\,] \cup M$

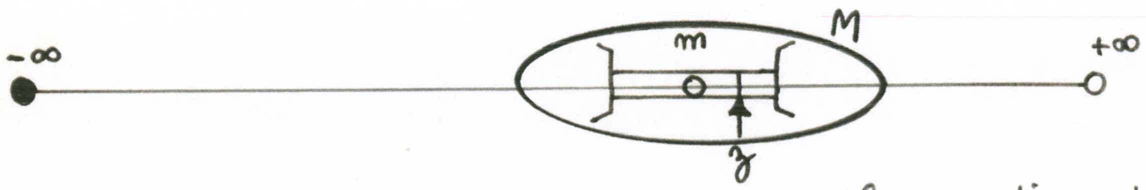
et dès lors $m \in E$

— $m = \text{Max } E$

$E = [-\infty \;\; m\,]$

Si par absurde $m \neq +\infty$

alors existe z



mézalor $[-\infty \;\; z\,]$ est recouvert par la partie FINIE

$\mathcal{F} \cup \{M\}$ de $\mathcal{R}$

et Max $E = m < z \in E$ ctd !

$m = +\infty$

$E = [-\infty \;\; +\infty\,] \subset \bar{R} \subset A \subset \bar{R}$

$A = E = \bar{R}$

ARCS FERMÉS et CYCLES sont COMPACTS

Dans $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^+$: COMPACT = FERMÉ BORNÉ

Dans $\overline{\mathbf{R}}$: COMPACT = FERMÉ

Dans $\mathbf{R}$ — dans $\overline{\mathbf{R}}$ — Dans $\mathbf{R}^+$

COMPACT CONNEXE NON VIDE = INTERVALLE FERMÉ = ARC FERMÉ OU SINGLETON

Voici une fonction continue f de $\overline{\mathbb{R}}$ VERS $\overline{\mathbb{R}}$
et un intervalle fermé $[a,b] \subset \operatorname{dom} f$

L'intervalle fermé $[a,b]$ de $\overline{\mathbb{R}}$ est un compact connexe non vide
Continuité respecte compacité et connexité
L'image $f[a,b]$ de $[a,b]$ pour f est un compact connexe non vide de $\overline{\mathbb{R}}$
c'est-à-dire un intervalle fermé $[u,v]$ de $\overline{\mathbb{R}}$

Théorème des Valeurs Intermédiaires

SI f est une fonction continue de $\overline{\mathbb{R}}$ vers $\overline{\mathbb{R}}$
et $[a,b] \subset \operatorname{dom} f$

ALORS $\forall y \in [f(a), f(b)] \ \exists x \in [a,b]$

$$f(x) = y$$

$\exists\, r, s \in [a,b]$:

$$f(r) = \min f[a,b] \wedge f(s) = \max f[a,b]$$

Théorème du Minimum et du Maximum

MONOTAL

= Ensemble muni d'une paire d'ordres totaux réciproques

Pour tout couple de points a, b du monotal M :

$$[a,b] = \{x \in M \mid a \leqslant x \leqslant b \lor a \geqslant x \geqslant b\}$$

$$[a,b[\; = \{x \in M \mid a \leqslant x < b \lor a \geqslant x > b\}$$

$$]a,b[\; = \{x \in M \mid a < x < b \lor a > x > b\}$$

MONOTALIE = La paire d'ordres d'un monotal

ORDONNER un MONOTAL = passer du monotal à l'un de ses ordonnés

L'application f du monotal M dans le monotal N est monotone

ssi

Elle est monotone pour un ordre de M et un ordre de N

ssi

Elle est monotone pour tout ordre de M et tout ordre de N

Pour les MONOTAUX

MORPHISME = Application f telle que $\forall x, y$: $f[x,y] \subset [f(x), f(y)]$

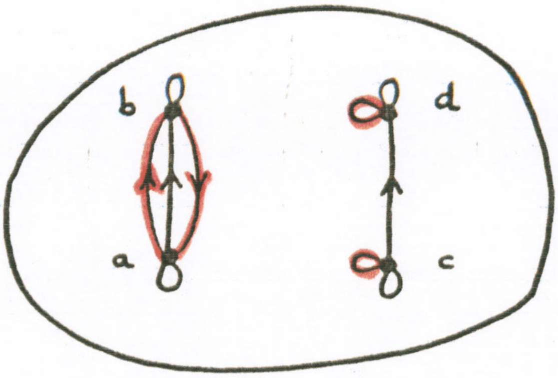
ISO(MORPHISME) = Bijection qui conserve les intervalles fermés

AUTO(MORPHISME) = Permutation qui permute les intervalles fermés

L'hypothèse MONOTALE est essentielle dans ce résultat (cf. EX)

Au vu de ce théorème on voit que la monotalie d'un monotal aurait encore pu être définie comme l'ensemble des intervalles fermés du monotal

EX Voici un ordonné $E, \leq$ ... et donc un monotone $E, \{\leq \geq\}$



$E, \leq$

et une permutation qui permute les intervalles fermés.

Cette permutation n'est pas un automorphisme du monotone.

EX

Entre MONOTAUX

f MONOTONE ssi f préserve la relation ternaire « ... est entre ... et ... »

pre

$f : M \to N$ conserve les intervalles fermés

ssi

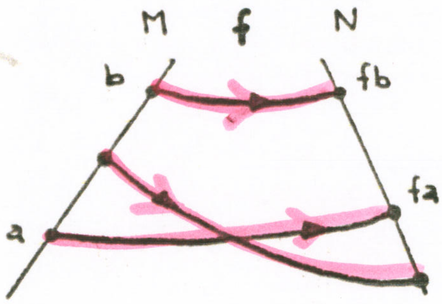
$f($intervalle fermé de $M) =$ intervalle fermé de N

□ *Si* $f : M \to N$ est une bijection entre monotaux

qui conserve les intervalles fermés

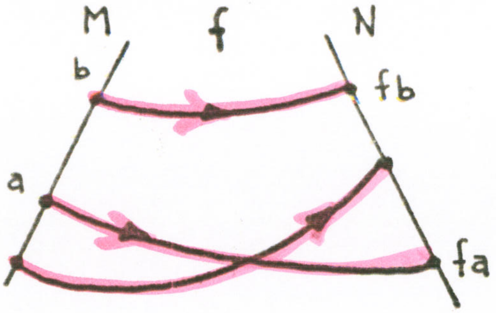
Alors $\forall\, a, b \in M \quad : \quad f[a,b] = [f(a), f(b)]$

* On n'a jamais



on a donc $\quad f[a,b] \subset [f(a), f(b)]$

ni



on a donc aussi $\quad f[a,b] \supset [f(a), f(b)]$

■

Pour les MONOTAUX

MORPHISME $M \to N$

= Application $f : M \to N$

telle que $\forall\, x, y \in M \; : \; f[x,y] \subset [f(x), f(y)]$

L'implication $\Rightarrow$ est évidente.

▶ Application $f : M \to N$ qui satisfait la condition du théorème

- f est constante $\vdash$ f est monotone ..
- f n'est pas constante

▶ $a, b \in M \; : \; a \neq b$ et $f(a) \neq f(b)$

▶ M ordonné par $a \leqslant b$

▶ N ordonné par $f(a) \leqslant f(b)$

Il faut montrer que $\forall x, y \in M \, : \, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$

✻

$$\boxed{x \leqslant y}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \big(y \in [x,a] \wedge a \in [y,b] \wedge a \in [x,b] \big) \\ \vee \; \ldots \end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \big(f(y) \in [f(x), f(a)] \wedge f(a) \in [f(y), f(b)] \wedge f(a) \in [f(x), f(b)] \big) \\ \vee \; \ldots \end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f(x) \leqslant f(y)} \qquad \blacksquare$$

$\mathbf{R}, \{\leqslant, \geqslant\}$ est un monotal que nous noterons brièvement $\mathbf{R}$

Les droites de Π sont monotales ■

Toute projection parallèle d'une droite sur une droite est monotone ■

L'ensemble des intervalles ouverts de $\mathbf{R}$ est une base de sa topologie usuelle.

La monotalie de $\mathbf{R}$ détermine sa topologie

<u>Toute permutation monotone de $\mathbf{R}$ est un homéo</u>

$\mathbf{R}, \tau_{us} \longrightarrow \mathbf{R}, \tau_{us}$ ■

Tout homéo $\mathbf{R}, \tau_{us} \longrightarrow \mathbf{R}, \tau_{us}$ permute l'ensemble des connexes de $\mathbf{R}, \tau_{us}$

permute l'ensemble des compacts de $\mathbf{R}, \tau_{us}$

permute l'ensemble des compacts connexes de $\mathbf{R}, \tau_{us}$

permute l'ensemble des compacts connexes non vides de $\mathbf{R}, \tau_{us}$

permute l'ensemble des intervalles fermés de $\mathbf{R}$

L'ensemble des intervalles fermés d'un monotal en détermine la structure (monotale)

Voici des points distincts a, b du monotal M
Appelons $\leqslant$ l'ordre du monotal M défini par $a \leqslant b$
On doit prouver que pour tout couple x, y de points distincts de $M \setminus \{a, b\}$, la connaissance de l'ensemble des intervalles fermés de M permet de décider

$$x < y \quad \text{ou} \quad y < x$$

$$\boxed{x < y}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} & \big([ab] \cap [ax] = \{a\} \neq [ab] \cap [ay]\big) \\ \vee & \big([ab] \cap [ax] = \{a\} = [ab] \cap [ay] \ \wedge\ [ax] \cap [ay] = [ay]\big) \\ \vee & \big([ab] \cap [ax] \neq \{a\} \neq [ab] \cap [ay] \ \wedge\ [ax] \cap [ay] = [ay]\big) \end{aligned}}$$

■

2 La monotalie d'un monotal aurait encore pu être définie comme l'ensemble des intervalles fermés du monotal.

□ <u>L'ensemble des intervalles fermés de $\mathbf{R}^+$ détermine la structure d'ordre $\mathbf{R}^+ \leqslant$</u>

0 est le seul point de $\mathbf{R}^+$ dont l'ablation fournit un épointé connexe.

* Pour tout couple de points distincts de $\mathbf{R}^+_\circ$:

$$x < y \iff [0\, x] \subset [0\, y]$$

Dans $\mathbf{R}, \leqslant, \mathcal{T}_{us}$ — Dans $\overline{\mathbf{R}}, \leqslant, \mathcal{T}_{us}$ — Dans $\mathbf{R}^+, \leqslant, \mathcal{T}_{us}$

Pour tout couple de points distincts a, b :
[a b] est le seul sous-espace arc fermé d'extrémités a, b

Par oubli :

Dans $\mathbf{R}, \leqslant, \mathcal{T}_{us}$ — Dans $\overline{\mathbf{R}}, \leqslant, \mathcal{T}_{us}$ — Dans $\mathbf{R}^+, \leqslant\, \mathcal{T}_{us}$

Pour tout couple de points distincts a, b :
il existe un et un seul sous-espace, arc fermé d'extrémités a, b

Pour tout couple de points distincts a, b d'un arc A il existe un et un seul sous-espace, arc fermé d'extrémités a, b

On le notera, tout naturellement $[a\ b]$

Pour tout arc $A, \mathcal{T}_{us}$

$$\{ [x\ y] \mid x, y \in A \wedge x \neq y \}$$

est l'ensemble des sous-espaces arcs fermés

L'ensemble des sous-espaces arcs fermés de $\mathbf{R}, \mathcal{T}_{us}$ ou de $\overline{\mathbf{R}}, \mathcal{T}_{us}$ définit monotalie de $\mathbf{R}$ ou $\overline{\mathbf{R}}$

Dans $\mathbf{R}, \mathcal{T}_{us}$ — Dans $\overline{\mathbf{R}}, \mathcal{T}_{us}$

Topologie définit Monotalie
Monotalie définit Topologie

Dans $\mathbf{R}^+, \mathcal{T}_{us}$

Topologie définit Ordre
Ordre définit Topologie.